OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14.02.2015
Clasa a IX-a
Soluţii

1) $[2x-5],[3x-7]\in\mathbb{Z}$ Presupunem că $[3x-7]\neq 0$ Rezultă că $\sqrt{2}=\frac{[2x-5]}{[3x-7]}\in\mathbb{Q}$. Contradicție!

Deci $[3x-7]=0\Rightarrow[2x-5]=0$, ceea ce implică $x\in\left[\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)\cap\left[\frac{5}{2},3\right)$

$\Rightarrow x\in\left[\frac{5}{2},\frac{8}{3}\right)$

2) $\sqrt{2015x+yz}=\sqrt{x^2+xy+xz+yz}=\sqrt{(x+y)(x+z)}$. Aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele $x+y$ si $x+z$ obținem $\sqrt{2015x+yz}\le\frac{2x+y+z}{2}$. Analog se obțin relațiile $\sqrt{2015y+zx}\le\frac{x+2y+z}{2}$ și $\sqrt{2015z+xy}\le\frac{x+y+2z}{2}$, iar prin adunare conduc la relația cerută.

3) În cazul când triunghiul ABC este dreptunghic, relaţia este evidentă.
Dacă triunghiul nu este dreptunghic, fie D punctual diametral opus lui A în cercul circumscris şi P mijlocul laturii BC .
Patrulaterul BHCD este paralelogram.
Mijlocul diagonalei HD coincide cu mijlocul P al laturii BC .
În triunghiul AHD,OP este linie mijlocie, deci AH =2OP.
Deci $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$

4) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DC}\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ (1)

Notăm $x=BF=BD, y=DC=CE, z=EA=AF$. Obținem

$\overrightarrow{AF}=\frac{z}{z+x}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CE}=\frac{y}{y+z}\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}=\frac{x}{x+y}\overrightarrow{BC}$ (2)

Din relațiile 1 și 2 obținem $\frac{z}{z+x}\overrightarrow{AB}+\frac{y}{y+z}\overrightarrow{CA}+\frac{x}{x+y}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. Cum $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$, rezultă că $\frac{z}{z+x}(-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC})+\frac{y}{y+z}\overrightarrow{CA}+\frac{x}{x+y}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, adică $\left(\frac{y}{y+z}-\frac{z}{z+x}\right)\overrightarrow{CA}+\left(\frac{x}{x+y}-\frac{z}{z+x}\right)\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

Dar vectorii $\overrightarrow{CA}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt necoliniari, ceea ce implică $\frac{y}{y+z}=\frac{z}{z+x}$ si $\frac{x}{x+y}=\frac{z}{z+x}$, adică $x^2=yz, z^2=xy$ și $y^2=xz$. Adunând ultimele trei relații, înmulțind cu 2 și grupând termenii, obținem $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$, ceea ce implică $x=y=z$. În concluzie *AB=BC=CA,* adică triunghiul *ABC* este echilateral.